Prof. Dr. Alfred Toth

Brüche und gebrochene Kategorien

1. Brüche sind quantitative Zahlen und wurden von Landau (1930, S. 19) wie folgt definiert.

Definition 1. Unter einem Bruch x_1/x_2 versteht man das Paar der natürlichen Zahlen x_1, x_2 (in dieser Reihenfolge).

Definition 2. $(x_1/x_2) \sim (y_1/y_2)$, wenn $x_1y_2 = y_1x_2$.

Paare von Zahlen der Form $A = \langle x, y \rangle$ werden bekanntlich als geordnete Mengen im Gegensatz zu ungeordneten Mengen der Form $B = \{x, y\}$ bezeichnet. Den Zusammenhang zwischen geordneten und ungeordneten Mengen regelt der Satz von Wiener und Kuratowski, nach dem gilt

$$\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

2. Nun sind allerdings auch die Subzeichen der benseschen semiotischen Matrix (vgl. Bense 1975, S. 100 ff.) als geordnete Paare, und zwar als kartesische Produkte von Primzeichen der Form

$$P_{td} = \langle x. \rangle$$

$$P_{tt} = \langle .y \rangle$$

(darin td für triadisch und tt für trichotomisch steht), vermöge

$$P_{td} \times P_{tt} = \langle x.y \rangle$$

$$P_{tt} \times P_{td} = \langle x.y \rangle^{-1} = \langle y.x \rangle$$

definiert. Da nun zwar $x, y \in \{1, 2, 3\}$ gilt, diese von Bense eingeführten semiotischen Zahlen jedoch die peirceschen ordinalen Kategorien der Erstheit, Zweitheit und Drittheit bzw. ihrer modalen Entsprechungen der Möglichkeit, Wirklichkeit und Notwendigkeit als Referenzobjekte haben, handelt es sich bei $P = \{1, 2, 3\}$ nicht um quantitative, sondern um qualitative Zahlen. Da sie den vollständigen semiotischen Objektbezug referentiell erfüllen, handelt es sich genauer in der Terminologie Benses (vgl. Bense 1975, S. 172) um

Maßzahlen, allerdings eben um qualitative und nicht um quantitative Maßzahlen. Bildet man P auf sich selbst ab, d.h. bildet man $P \times P$, dann erhält man ein System von $3 \cdot 3 = 9$ Subzeichen, von denen nur drei kategorial homogen, aber sechs kategorial inhomogen sind

	1	2	3
1	1.1	1.2	1.3
2	2.1	2.2	2.3
3	3.1	3.2	3.3

Kartesische Produkte aus Kategorien der Form

$$S = \langle x.y \rangle \text{ mit } x \neq y$$

sind somit gebrochene Kategorien, insofern x und y verschiedene Kategorien als Referenzobjekte haben. Man darf daher auch im Anschluß an Toth (2012) von qualitativen Brüchen sprechen. Für diese gelten nun natürlich die landauschen Definitionen nicht mehr, und zwar nicht einmal für die genuinen Produkte, denn es ist z.B. $\langle 1.1 \rangle \neq \langle 2.2 \rangle \neq \langle 3.3 \rangle$, während für quantitative Brüche natürlich $(1/1) = (2/2) = (3/3) = 1$ gilt. Selbstverständlich gelten deswegen auch die quantitativ-arithmetischen Operation für qualitative Brüche nicht. Z.B. ist $\langle 1.1 \rangle + \langle 2.2 \rangle \neq \langle 2.2 \rangle$, während für quantitative Brüche $(1/1) + (2/2) = 2$ gilt.

Literatur

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Landau, Edmund, Grundlagen der Analysis. Leipzig 1930

Toth, Alfred, Rationale Semiotik. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics 2012

8.2.2015